التحليل العددي
(NUMERICAL ANALYSIS)

المحاضرة الأولى

م.م شيماء عزيز جابر   م.م ندى بشير جهيد

Errors الأخطاء

يمكن إيجاد قيمة (أو قيم) تقريبية للحل ، وهذه القيمة (أو القيم التقريبة تحوي خطأ معيناً هو الفرق بين القيمة التقريبية والقيمة الدقيقة للحل. وعرفت كذلك أن الطرق المستخدمة في التقنيات العددية مبنية على تكرار خطوة (أو خطوات) معينة

أنواع الأخطاء

- الخطأ المطلق (The Absolute Errors)
- الخطأ النسبي (The Relative Errors)

الخطأ المطلق (*The Absolute Error*)

يعرف الخطأ المطلق في قيمة متغير ما بأنه القيمة المطلقة للفرق بين القيمة الدقيقة x والقيمة التقريبية $\hat{x}$ لذلك المتغير. ويرمز للخطأ المطلق بالمتغير x ، عادةً، بالرمز $\delta(x)$ ، أي أن:

$$\boxed{\delta(x) = |x - \hat{x}|}$$

مثلاً، لو كانت القيمة الدقيقة لمتغير ما هي $x = 0.2501$ والقيمة التقريبية لذلك المتغير هي $\hat{x} = 0.25$ ، فإن الخطأ المطلق في قيمة ذلك المتغير هو:

$$\delta(x) = |x - \hat{x}| = |0.2501 - 0.25| = 0.0001 = 0.1x10^{-3}$$

وكذلك لو كانت القيمة الدقيقة لهذا المتغير هي $x = 0.2499$ والقيمة التقريبية له هي ايضاً $\hat{x} = 0.25$ ، فإن الخطأ المطلق في قيمة ذلك المتغير هو ايضاً:

$$\delta(x) = |x - \hat{x}| = |0.2499 - 0.25| = 0.0001 = 0.1x10^{-3}$$

ومما سبق يُستنتج أنه إذا كان الخطأ المطلق في قيمة متغير ما هو $\delta(x)$ والقيمة التقريبية لذلك المتغير هي $\hat{x}$ فإن القيمة الدقيقة لذلك المتغير x تقع في الفترة المغلقة $[\hat{x} - \delta(x), \hat{x} + \delta(x)]$ ، أي أن:

$$\hat{x} - \delta(x) \le x \le \hat{x} + \delta(x)$$

فمثلاً، اذا كانت القيمة التقريبية لمتغير ما هي $\hat{x} = 0.25$ وكان مقدار الخطأ المطلق في هذه القيمة هو $\delta(x) = 0.0001$ ، فإن القيمة الدقيقة لهذا المتغير تقع في الفترة المغلقة $[0.2499, 0.2501]$ ، أي أن:

$$0.2499 \le x \le 0.2501$$

الخطأ النسبي (*The Relative Error*)

يعرف الخطأ النسبي في قيمة متغير ما بأنه نسبة الخطأ المطلق الى القيمة المطلقة للقيمة الدقيقة لذلك المتغير، ويرمز للخطأ النسبي عادةً بالرمز $\rho(x)$.

أي أن:

$$\boxed{\rho(x) = \frac{\delta(x)}{|x|} = \frac{|x - \hat{x}|}{|x|}}$$

ولما كانت القيمة الدقيقة للمتغير x غير معروفة ، ولكن القيمة التقريبية $\hat{x}$ هي المعروفة ، وكذلك وبسبب أن الفرق بين هاتين القيمتين عادةً ما تكون قليلة (قيمة الخطأ المطلق قليلة) ، فإن الخطأ النسبي يمكن تعريفه ايضاً بـ:

$$\rho(x) = \frac{\delta(x)}{|\hat{x}|}$$

مثلاً، اذا كانت القيمة التقريبية لمتغير ما هي $\hat{x} = 0.250$ وكان الخطأ النسبي في هذه الحالة هو $\rho(x) = 0.01$ ، فإن الخطأ المطلق في قيمة هذا المتغير هو:

$$\delta(x) = \rho(x).|\hat{x}| = (0.01).(0.250) = 0.0025$$

أي أن:

$$0.2475 \le x < 0.2525$$

وعادة ما يوصف الخطأ النسبي باستعمال النسبة المئوية، في هذه الحالة فإن:

$$\rho(x)[\%] = \frac{\delta(x)}{|\hat{x}|} x100\%$$

ومما يجب ذكره ايضاً أن الخطأ النسبي يعطي، عادةً ، صورةً أوضح عن دقة التقدير أكثر من الخطأ المطلق وخاصة اذا ما كانت القيم كبيرة جداً أو صغيرة جداً.

انتشار الخطأ (The Error Propagation)

▪ إنتشار الخطأ في دوال المتغير الواحد

(Error Propagation in Single-variable Functions)

في الدالة المتصلة $y = f(x)$ ، اذا كانت $\hat{x}$ هي القيمة التقريبية للمتغير وكانت x هي القيمه الدقيقة لذلك المتغير ، فإن الخطأ المطلق في هذا المتغير ، وكما عرفت سابقاً، هو:

$$\delta(x) = |x - \hat{x}|$$

والخطأ المطلق في قيمة الدالة $f(x)$ هو:

$$\delta(f(x)) = |f(x) - f(\hat{x})|$$

وبتطبيق نظرية القيمة المتوسطة ، نجد أن:

$$\frac{f(x) - f(\hat{x})}{x - \hat{x}} = f'(\xi)$$

حيث ξ قيمة محصورة في الفترة المغلقة $[x, \hat{x}]$.

من هذه المعادلة تجد أن:

$$f(x) - f(\hat{x}) = (x - \hat{x}).f'(\xi)$$

ومنها :

$$|f(x) - f(\hat{x})| = |x - \hat{x}|.|f'(\xi)|$$

أي أن :

$$\delta(f(x)) = \delta(x).|f'(\xi)|$$

وحيث أن القيمة الدقيقة لـ ξ ليست معروفة ، ولكن معروف أنها تقع في الفترة $[x, \hat{x}]$ ، وحيث أن القيمتين x و $\hat{x}$ متساويتين تقريباً ، فإنه يمكن اعتبار أن:

$$\xi = \hat{x}$$

عندها تكون قيمة الخطأ المطلق في الدالة هي:

$$\boxed{\delta(f(x)) = \delta(x).|f'(\hat{x})|}$$

▪ انتشار الخطأ في الدوال عديدة المتغيرات

(Error Propagation in Multi-Variable Functions)

عرفت سابقا أن قيمة الخطأ المطلق في دالة المتغير الواحد تعطى بالعلاقة

$$\delta(f(x))=\delta(x).|f'(\hat{x})|$$

وفي حال الدالة كثيرة المتغيرات $f(x,y,z,...)$ فإن الخطأ المطلق في هذه الدالة ، وبإستخدام مفهوم التفاضل الكلي (total differential)، سيكون مجموع الأخطاء الناتجة عن كل متغير لوحده ، أي أن:

$$\delta(f(x,y,z...))=\delta(x).|f_x(\hat{x},\hat{y},\hat{z}...)|+\delta(y).|f_y(\hat{x},\hat{y},\hat{z},...)|+\delta(z).|f_z(\hat{x},\hat{y},\hat{z},...)|+....$$

حيث:

$$f_x(x,y,z,..)=\frac{\partial f(x,y,z,...)}{\partial x}$$

$$f_y(x,y,z,..)=\frac{\partial f(x,y,z,...)}{\partial y}$$

$$f_z(x,y,z,..)=\frac{\partial f(x,y,z,...)}{\partial z}$$

وقيمة الخطأ النسبي هي:

$$\rho(f(x))=\frac{\delta(f(x))}{|f(\bar{x})|}=\frac{\delta(x).|f'(\hat{x})|}{|f(\bar{x})|}$$

مثال (1) : أوجد مقدار الخطأ المطلق والنسبي في قيمة الدالة $f(x)=x^2$ ، اذا كانت القيمة الدقيقة للمتغير هي $x=5.01$ والقيمة التقريبية لهذا المتغير هي $\bar{x}=5.00$.

الحل: الخطأ المطلق في قيمة الدالة هو:

$$\delta(f(x))=\delta(x).|f'(\hat{x})|$$

الخطأ المطلق في المتغير هو:

$$\delta(x)=|x-\bar{x}|=|5.01-5.00|=0.01$$

مشتقة الدالة هي:

$$f'(\hat{x})=2\hat{x}$$

وتكون قيمة الخطأ المطلق في الدالة:

$$\delta(f(x))=\delta(x).|f'(\hat{x})|=0.01x10.00=0.100$$

وتستطيع التأكد من اجابتك بمعرفتك أن:

$$\delta(f(x))=|f(x)-f(\bar{x})|=|(5.01)^2-(5.00)^2|=0.1001$$

والخطأ النسبي في الدالة هو:

$$\rho(f(x))=\frac{\delta(x).|f'(\hat{x})|}{|f(\bar{x})|}=\frac{0.100}{(5.00)^2}=0.004$$

مثال (1): اذا كانت $w = x + y - z$ وكانت $x = 3.0 \pm 0.2$ ، $y = 2.0 \pm 0.6$ و $z = 4.50 \pm 0.01$ ، أوجد قيمة الدالة w وقيمة الخطأ المطلق فيها.

الحل: القيمة التقريبية لـ w هي:

$$\hat{w} = 3.0 + 2.0 - 4.5 = 0.5$$

الخطأ المطلق في w هو:

$$\delta(w) = \delta(x).\left|w_x(\hat{x},\hat{y},\hat{z})\right| + \delta(y).\left|w_y(\hat{x},\hat{y},\hat{z})\right| + \delta(z).\left|w_z(\hat{x},\hat{y},\hat{z})\right|$$

حيث:

$$\delta(x) = 0.2$$

$$\delta(y) = 0.6$$

$$\delta(z) = 0.01$$

وكذلك:

$$w_x(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) = 1$$

$$w_y(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) = 1$$

$$w_z(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) = -1$$

أي أن:

$$\delta(w) = 0.2 + 0.6 + 0.01 = 0.81$$

وبإستخدام نفس عدد الخانات المستخدمة للتعبير عن w تصبح

$$\delta(w) = 0.8$$

أي أن:

$$w = 0.5 \pm 0.8$$

لاحظ أن الخطأ المطلق لدالة تتكون من جمع (أو طرح) بعض الحدود يساوي مجموع الاخطاء المطلقة لتلك الحدود.

مثال (2): أوجد مقدار كل من الخطأ المطلق والخطأ النسبي في قيمة الدالة $f(x,y) = x + y$ ، اذا كانت القيمة الدقيقة للمتغير x هي 5.01 والقيمة التقريبية له هي $\hat{x} = 5.00$ ، والقيمة الدقيقة للمتغير y هي 6.02 والقيمة التقريبية له هي $\hat{y} = 6.00$.

الحل: الخطأ المطلق في قيمة هذه الدالة هو:

$$\delta(f(x,y)) = \delta(x).\left|f_x(\hat{x},\hat{y})\right| + \delta(y).\left|f_y(\hat{x},\hat{y})\right|$$

هنا:

$$\delta(x) = |x - \hat{x}| = |5.01 - 5.00| = 0.01$$

$$\delta(y) = |y - \hat{y}| = |6.02 - 6.00| = 0.02$$

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 1$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 1$$

ويكون:

$$\delta(f(x,y)) = \delta(x) + \delta(y) = 0.01 + 0.02 = 0.03$$

والخطأ النسبي هو:

$$\rho(f(x,y)) = \frac{\delta(f(x,y))}{|f(\hat{x},\hat{y})|} = \frac{0.03}{11} = 0.28x10^{-2}$$

مثـال(2) : اذا كانـت $y = 3x$ وكانـت $x = 3.0 \pm 0.5$ ، أوجـد قيمـة y وقيمـة الخطأ المطلق فيها.

الحل: القيمة التقريبية لـ y هي:

$$\hat{y} = 3(3.0) = 9.0$$

الخطأ المطلق في y هو:

$$\delta(y) = \delta(x).\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x=\hat{x}}$$

حيث:

$$\delta(x) = 0.5$$

وكذلك:

$$\frac{dy}{dx} = 3$$

أي أن:

$$\delta(y) = 3(0.5) = 1.5$$

أي أن:

$$y = 9.0 \pm 1.5$$

لاحـظ أن الخطأ المطلـق لحاصـل ضـرب مـتغير بعـدد ثابـت يـساوي الخطأ المطلق للمتغير مضروباً بالعدد الثابت.

مثال(3) : اذا كانت $z = x.y$ وكانت $x = 3.62 \pm 0.02$ و $y = 2.0 \pm 0.2$ أوجد قيمة z وقيمة الخطأ المطلق والنسبي فيها.

الحل: القيمة التقريبية لـ z هي:

$$\hat{z} = (3.62)(2.0) = 7.24$$

الخطأ المطلق في z هو:

$$\delta(z) = \delta(x).|z_x(\hat{x},\hat{y})| + \delta(y).|z_y(\hat{x},\hat{y})|$$

حيث:

$$\delta(x) = 0.02$$

$$\delta(y) = 0.2$$

وكذلك:

$$z_x(\hat{x},\hat{y}) = \hat{y}$$

$$z_y(\hat{x},\hat{y}) = \hat{x}$$

أي أن:

$$\delta(z) = (0.02)(2.0) + (0.2)(3.62) = 0.764$$

وبتقريب هذه القيمة (بإستخدام نفس عدد الخانات للجزء الكسري المستخدمة للتعبير عن القيمة التقريبية لـ z)، تصبح:

$$\delta(z) = 0.76$$

أي أن:

$$z = 7.24 \pm 0.76$$

الخطأ النسبي في z هو:

$$\rho(z) = \frac{\delta(z)}{|\hat{z}|} = \frac{0.76}{7.24} = 0.105$$

ويمكن حساب قيمة الخطأ النسبي بإستخدام معادلة الخطأ المطلق التي تم إيجادها سابقاً، لتجد أن:

$$\rho(z) = \frac{\delta(z)}{|\hat{z}|} = \frac{\delta(x).|\hat{y}| + \delta(y).|\hat{x}|}{|\hat{x}.\hat{y}|} = \frac{\delta(x).|\hat{y}|}{|\hat{x}||\hat{y}|} + \frac{\delta(y).|\hat{x}|}{|\hat{x}||\hat{y}|}$$

أي أن:

$$\rho(z) = \frac{\delta(x)}{|\hat{x}|} + \frac{\delta(y)}{|\hat{y}|} = \rho(x) + \rho(y)$$

قسمة ايضاً

لاحظ أن الخطأ النسبي لحاصل ضرب متغيرين (أو أكثر) يساوي حاصل جمع الخطأ النسبي للمتغيرين .

مثال (4): أوجد قيمة الخطأ النسبي في الدالة $z = x^m.y^n$

الحل:

$$\delta(z)=\delta(x).|z_x|+\delta(y).|z_y|$$

ولكن:

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = mx^{m-1}y^n$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = nx^m y^{n-1}$$

أي أن:

$$\delta(z)=\delta(x).|mx^{m-1}y^n|+\delta(y).|nx^m y^{n-1}|$$

$$=\delta(x).|m|.|x^{m-1}y^n|+\delta(y).|n|.|x^m y^{n-1}|$$

وبالتالي، فإن:

$$\rho(z) = \frac{|m|.\delta(x).|x^{m-1}y^n|}{|x^m.y^n|}+\frac{|n|.\delta(y).|x^m y^{n-1}|}{|x^m.y^n|}$$

أي أن:

$$\rho(z) = |m|\frac{\delta(x)}{|x|}+|n|\frac{\delta(y)}{|y|} = |m|.\rho(x)+|n|.\rho(y)$$

ملاحظة: بنفس الطريقة تستطيع إيجاد أن الخطأ النسبي للدالة $f(x,y,z,...) = x^m.y^n.z^k...$ هو:

$$\rho(f(x,y,z)) = |m|.\rho(x)+|n|.\rho(y)+|k|.\rho(z)+...$$

مثال(5): اذا كانت $w=\frac{x^2y^4}{\sqrt[3]{z}}$ وكانت $x=3.53\pm0.02$ و $y=3.00\pm0.05$ و $z=8.0\pm0.3$، أوجد مقدار الخطأ المطلق والنسبي في w.

الحل: يمكن كتابة هذه الدالة بالصورة:

$$w=x^2y^4z^{-\frac{1}{3}}$$

باستخدام النتيجة من السؤال السابق، تجد أن:

$$\rho(w)=2\rho(x)+4\rho(y)+\frac{1}{3}\rho(z)$$

$$=2(\frac{0.02}{3.53})+4(\frac{0.05}{3.00})+\frac{1}{3}(\frac{0.3}{8.0})=0.0905$$

القيمة التقريبية لهذه الدالة هي:

$$\hat{w} = \frac{(3.53)^2.(3.00)^4}{\sqrt[3]{8}} = 504.67$$

والخطأ المطلق في هذه الدالة هو:

$$\delta(w)=\rho(w).\hat{w} = 0.0905(504.6664)=45.67$$

مثال (6): اذا كانت $w=xy^2+\frac{z}{x^2}$ وكانت $x=2.0\pm0.1$ و $y=3.0\pm0.3$ و $z=30.0\pm0.5$، أوجد مقدار الخطأ المطلق والنسبي في w.

الحل: هذه الدالة تتكون من حاصل جمع الحدين $u=xy^2$ و $v=\frac{z}{x^2}$

مثال (8): اذا كانت $z=x^y$ وكانت $x=2.0\pm0.1$ و $y=3.0\pm0.1$، أوجد مقدار الخطأ المطلق والنسبي في z.

مثال (9): اذا كانت $f(x,\alpha)=x.\sin(\alpha)$ وكانت $x=2\pm0.2$ و $\alpha=30^0\pm5^0$ أوجد مقدار الخطأ المطلق والنسبي في هذه الدالة.

3) اذا كانت $z=x/y$ وكانت $x=3.0\pm0.3$، $y=2.0\pm0.6$، أوجد قيمة z وقيمة الخطأ المطلق والخطأ النسبي فيها.

(Solution of Non Linear Equations)

سنستعرض في هذا البند عددا من الطرق العددية الايجاد قيمة تقريبية لجذر المعادلة الغيرخطية، كأن تكون كثيرة الحدود بمتغير واحد وذات قوى اكبر من (٢) او معادلة معقدة يصعب حلها بالطرق الاعتيادية المعروفة.

وان قيم الجذور التقريب يجب ان تكون مقبولة الى دقة محددة سابقا ($\in$).

أولا:- طريقة تنصيف الفترات (The Bisection method)

لنفترض ان الفترة [a,b] معلومة، وان الدالة $f(x)$ مستمرة فيها وتحقيق شرط نظرية التحليل (نظرية القيمة المتوسطة) أي ان $f(a).f(b)<0$

أي ان [a,b] تحتوي على الأقل جذرا واحدا فيها.

خطوات الحل

١-إيجاد قيمة x_1 من الصيغة $x_1=\frac{a+b}{2}$

٢-إيجاد قيمة $f(x_1)$

أ –اذا كانت $f(x_1)=0$ فأن جذر المعادلة هو x_1

ب-اذا كانت $f(a).f(x_1)<0$ فأن الفترة التي تحتوي الجذر هي $[a,x_1]$

ج-اذا كانت $f(a).f(x_1)>0$ فأن الفترة التي تحتوي الجذر هي $[x_1,b]$

في حالة(ب) فنعيد عملية التصنيف بأخذ $x=\frac{a+x1}{2}$

اما في الحالة (ج) فنعيد عملية التصنيف بأخذ $x=\frac{x1+b}{2}$

ونعيد تكرار هذه العمليات الى ان نصل للنقطة المطلوبة ($\in$)

شرط التوقف

يمكن استخدام بعض الصيغ الرياضية للتوقف عن اجراء العمليات الحسابية لهذه الطريقة وهي

① $|x_{i+1}-x_i|<\in$ ② $\frac{|x_{i+1}-x_i|}{|x_i|}<\in$ $|x_i|\neq 0$

③ $|f(x_i)|<\in$ حيث ان $\in$ قيمة صغيرة جدا وهي اكبر من الصفر ($\in>0$)

مثال:- باستخدام طريقة تنصيف الفترة جد قيمة تقريبية لجذر المعادلة التالية

$$f(x) = xlnx - 1, [1,2], \epsilon = 0.001$$

الحل:- نختبر فيما اذا كانت الفترة تحتوي على جذر للمعادلة

$f(1) = -1$

$f(2) = 0.33629436$

$f(1) * f(2) < 0$ يوجد جذر ضمن الفترة المعطاة

$$x_0 = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

$f(1.5) = -0.391802337$

$f(a_0).f(x_0) = (-1) * (-0.391802337) = 0.391802337 > 0$

$a_1 = x_0, b_1 = b_0 \Rightarrow [1.5,2]$

$|a_1 - b_1| = |1.5 - 2| = 0.5 > 0$

$$x_1 = \frac{1.5+2}{2} = 1.75$$

$f(1.75) = -0.020672371$

$f(a_1).f(x_1) = (-0.391802337) * (-0.020672371) = 0.008099483 > 0$

$a_2 = x_1, b_2 = b_1 \Rightarrow [1.75,2]$

$|a_2 - b_2| = |1.75 - 2| = 0.25 > \epsilon$

$$x_2 = \frac{1.75+2}{2} = 1.875$$

$f(1.875) = 0.178641836$

$f(a_2).f(x_2) = (-0.020672371)(0.178641836) = 0.00369295 < 0$

$a_3 = a_2, b_3 = x_2 \Rightarrow [1.75,1.875]$

$|a_3 - b_3| = |1.75 - 1.875| = 0.125 > \epsilon$

$x_3 = 1.8125$, $[1.75, 1.8125]$

$x_4 = 1.78123, [1.75, 1.78125$

$x_5 = 1.765625, [1.75, 1.765625]$

$x_6 = 1.7578125, [1.7578125, 1.765625]$

$x_7 = 1.76171875, [1.76171875, 1.765625]$

$x_8 = 1.763671875, [1.7671875, 1.763671875]$

$x_9 = 1.762625313$

$|x_9 - x_8| = 0.000976562$

$x_9 = 1.762625313$ هو الجذر للمعادلة اعلاه بنسبة خطأ اقل من (0.001)

$H.W$:- باستخدام طريقة تنصيف الفترة جد قيمة تقريبية لجذر المعادلة التالية:

$$f(x) = x - \cos x,\ [0,1],\ \epsilon = 0.02$$

أوجد الجذر التقريبي للمعادلة :

$$F(x) = x^3 - 9x + 1 = 0$$

والموجود ضمن المجال $[2,4]$ بطريقة تنصيف المجال متخذاً $\varepsilon = 0.035$

الحل :

لدينا

$$F(4) = 29,\quad F(2) = -9$$

إذا يوجد ضمن المجال $[2,4]$ جذر للمعادلة $F(x) = 0$ لنوجد

$$\bar{x} = \frac{2+4}{2} = 3$$

$$F(\bar{x}) = F(3) = 1 \Rightarrow F(a).F(\bar{x}) = (-9).(1) = -9 < 0$$
$$\Rightarrow b = \bar{x} = 3 \Rightarrow [a,b] = [2,3]$$
$$|a-b| = 1 > \varepsilon$$

إذا نعين $\bar{x}$ من جديد:

$$\bar{x} = \frac{2+3}{2} = 2.5$$

$$F(\bar{x}) = F(2.5) = -5.875 \Rightarrow F(a).F(\bar{x}) = (-9)(-5.875) = 52.875 > 0$$
$$\Rightarrow a = \bar{x} = 2.5 \Rightarrow [a,b] = [2.5,3]$$
$$|a-b| > \varepsilon$$

إذا نعين $\bar{x}$ من جديد:

$$\bar{x} = \frac{2.5+3}{2} = 2.75$$

$$F(x) = F(2.75) = -2.953125 \Rightarrow F(a).F(x) = (-9)(-2.953125) = 26.578125 > 0$$
$$\Rightarrow a = x = 2.75 \Rightarrow [a,b] = [2.75,3]$$
$$|a-b| > \varepsilon$$

إذا نعين $\bar{x}$ من جديد:

$$\bar{x} = \frac{2.75+3}{2} = 2.875$$

$$F(\bar{x}) = F(2.875) = -1.111328125 \Rightarrow F(a).F(\bar{x}) = (-9)(-1.111328125)$$
$$= 10.001953125 > 0$$
$$\Rightarrow a = \bar{x} = 2.875 \Rightarrow [a,b] = [2.875,3]$$
$$|a-b| > \varepsilon$$

إذا نعين $\bar{x}$ من جديد:

$$\bar{x} = \frac{2.875+3}{2} = 2.9375$$

$$F(\bar{x}) = F(2.9375) = 0.090087890625 \Rightarrow F(a).F(\bar{x}) = (-9)(0.090087890625)$$
$$= 0.810791 < 0$$
$$\Rightarrow b = \bar{x} = 2.9375 \Rightarrow [a,b] = [2.875, 2.9375]$$
$$|a-b| > \varepsilon$$

إذا نعين $\bar{x}$ من جديد:

$$\bar{x} = \frac{2.875+2.9375}{2} = 2.90625$$

$$F(x) = F(2.90625) = 0.609222412 \Rightarrow F(a).F(x)$$
$$= (0.090087890625)(0.609222412) > 0$$
$$\Rightarrow a = x = 2.90625 \Rightarrow [a,b] = [2.90625, 2.9375]$$
$$|a-b| = 0.03125 < \varepsilon$$

إذا نعين $\bar{x}$ من جديد:

$$\bar{x} = \frac{2.90625+2.9375}{2} = 2.921875$$

$$F(\bar{x}) = F(2.921875) = 0.3517952 \Rightarrow F(a).F(\bar{x}) > 0$$
$$\Rightarrow a = \bar{x} = 2.921875 \Rightarrow [a,b] = [2.921875, 2.9375]$$
$$|a-b| = 0.015625 < \varepsilon$$

وهكذا نكرر العملية 15 مرة فنحصل على الجذر التقريبي

$$x = 2.921875$$

ثانيا:- طريقة الموقع الكاذب (False position method)

تعد هذه الطريقة من الطرق السريعة وذات تقارب مضمون لقيمة جذور المعادلة الغير خطية، وهي تعتمد أيضا على نظرية المتوسطة.
لتكن f(x) دالة لها جذر يقع في [x1,x2] ، فمن الممكن تقريب منحني الدالة (الذي يقطع محور x) بخط مستقيم (x1,y1)-(x2,y2) وان هذا المستقيم يقطع محور x في نقطة مثل c=(x3,y3) ولأستخراج قيمة c يجب علينا استخراج معادلة المستقيم (x_1,y_1)-(x_2,y_2) وهي

$$\frac{y-y2}{x-x2}=\frac{y2-y1}{x2-x1} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{y3-y2}{x3-x2}=\frac{y2-y1}{x2-x1}$$

وبما ان قطعة المستقيم تقطع محور x فأن y3=0

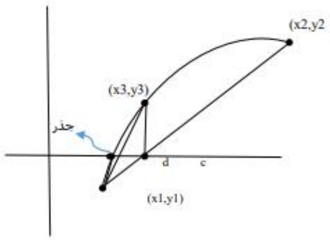
$$\frac{0-y2}{x3-x2}=\frac{y2-y1}{x2-x1} \qquad => \qquad x3=x2-\frac{y2(x2-x1)}{(y2-y1)}$$

فأذا لم تكن x_3 هي جذر المعادلة فعلينا إيجاد تقريب افضل للجذر فنقوم بإيجاد قيمة y3=f(x3) فأذا كانت

١- F(x3)=0 فأن x3 هي الجذر
٢- اذا كان f(x1)f(x3)<0 فأن جذر المعادلة يقع في [x1,x3]
٣- اذا كان f(x1)f(x3)>0 فأن جذر المعادلة يقع في [x3,x2]

وبأعادة الخوارزمية أعلاه وبعد عدة تكرارات فأننا نتوقف عند الدقة المطلوبة
ويمكن تعميم صيغة طريقة الموقع الكاذب بما يلي

$$x_{i+1}=x_i-\frac{yi(xi-x_{i-1})}{(yi-y_{i-1})} \qquad i=2,3,....$$



شرط التوقف

يمكن استخدام الصيغتين الاتيتين لتوقف عن الحل وهما

أ- $|x_{i+1}-x_i| \le \epsilon$ ب- $|y_{i+1}| \le \epsilon$

مثال:- باستخدام طريقة الموضع الكاذب جد الجذر التقريبي للدالة

a) $f(x)=xe^x-1$ ضمن الفترة [0,1] وبدقة $\epsilon=0.05$

الحل:-

$x_1=0, \quad y_1=-1$
$x_2=1, y_2=1.718$

$y_1 * y_2<0$ يوجد جذر ضمن الفترة المعطاة

$$x_3=x_2-\frac{y_2(x_2-x_1)}{y_2-y_1}=1-\frac{1.718(1-0)}{1.718+1}=0.368$$

$|x_3-x_2|=0.632>\epsilon$

$y_3=f(x_3)=-0.468, \; y_1 * y_3>0 \Rightarrow [0.368,1]$

$$x_4=x_3-\frac{y_3(x_3-x_2)}{y_3-y_2}=0.368+\frac{0.468(0.368-1)}{-0.468-1.718}=0.503$$

$|x_4-x_3|=0.135>\epsilon$

$y_4=f(x_4)=-0.168, \; y_3 * y_4>0 \Rightarrow [0.503,1]$

$$x_5=x_4-\frac{y_4(x_4-x_3)}{y_4-y_3}=0.503+\frac{0.168(0.503-1)}{-0.168-1.718}=0.547$$

$|x_5-x_4|=0.044<\epsilon$

x_5 هو الجذر المطلوب

b) $f(x)=x^6-x-1$ ضمن الفترة [1,2] وبدقة $\epsilon=0.02$

الحل:-

$x_1=1, \quad y_1=-1$
$x_2=2, \quad y_2=61$

$y_1 * y_2<0$ يوجد جذر ضمن الفترة المعطاة

$$x_3=x_2-\frac{y_2(x_2-x_1)}{y_2-y_1}=2-\frac{61(2-1)}{61+1}=1.016$$

$|x_3-x_2|=0.984>\epsilon$

$y_3=f(x_3)=-0.916, \quad y_1 * y_3>0 \Rightarrow [1.016,2]$

$$x_4=x_3-\frac{y_3(x_3-x_2)}{y_3-y_2}=1.016+\frac{0.916(1.016-2)}{-0.916-61}=1.031$$

$|x_4-x_3|=0.015>\epsilon$

$y_4=f(x_4)=-0.83, \; y_3 * y_4>0 \Rightarrow [1.031,2]$

$$x_5=x_4-\frac{y_4(x_4-x_3)}{y_4-y_3}=1.031+\frac{0.83(1.031-2)}{-0.83-61}=1.044$$

$|x_5-x_4|=0.013<\epsilon$

x_5 هو الجذر المطلوب

H.W:- *باستخدام طريقة الموضع الكاذب جد قيمة تقريبية لجذر المعادلة التالية:*

$$f(x)=x^3+2x^2-x-1, \; [-1,0], \; \epsilon=0.00005$$

3.4 طريقة النقطة الثابتة (*The Fixed-point Method*)

تقاربيا خطي

في هذه الطريقة ، والتي تسمى ايضاً طريقة التكرار البسيط (The method of simple iterations)، تتم كتابة المعادلة $f(x)=0$ بالصيغة $x=g(x)$ ، بحيث أن هذه الصيغة تكون مناسبة لبناء سلسلة من القيم تؤول في النهاية الى جذر المعادلة $f(x)=0$.

وخوارزمية إيجاد جذر المعادلة $f(x)=0$ بإستخدام هذه الطريقة هي:

- اكتب المعادلة $f(x)=0$ بالصيغة $x=g(x)$.
- أوجد قيمة تقريبية لجذر المعادلة $f(x)$ ، وذلك بإستخدام احدى الطرق التي تم شرحها سابقاً، ولتكن هذه القيمة x_0 ، مثلاً.
- عَوِّض هذه القيمة بالطرف الأيمن من المعادلة $x=g(x)$ ، لتجد القيمة التقريبية التالية (القيمة x_1)، أي أن:

$$x_1=g(x_0)$$

- عَوِّض هذه القيمة (القيمة x_1) ، مرة أخرى، بالطرف الأيمن من المعادلة $x=g(x)$ ، لتجد القيمة التقريبية التالية لجذر المعادلة (القيمة x_2)، أي أن:

$$x_2=g(x_1)$$

- استمر بتكرار هذه الخطوة حتى الوصول الى الدقة المطلوبة بقيمة الجذر.

ومما يجب ذكره أن القيمة x_0 التي صورتها في الدالة $g(x)$ تساويها، أي $\boxed{x_0=g(x_0)}$ ، تسمى نقطة ثابتة للدالة $g(x)$. فمثلاً للدالة $g(x)=x+\sin(\pi.x)$ ، فإن $x_0=0$ هي نقطة ثابتة لهذه الدالة ، لأن:

$$g(0)=0$$

أي أن:

$$x_0=g(x_0)$$

وكذلك $x_1=1$ هي ايضاً نقطة ثابتة لهذه الدالة، لأن:

$$g(1)=1+\sin(\pi)=1$$

أي أنه، ايضاً:

$$x_1=g(x_1)$$

من المعروف أنه يمكن كتابة المعادلة $f(x)=0$ بصُوَرٍ مختلفة للصيغة $x=g(x)$.

مثلاً المعادلة $\cos(2x)-x=0$ ، يمكن كتابتها بالعديد من الصيغ، منها:

$$x=\frac{\cos^{-1}(x)}{2}$$ $g(x)=\frac{\cos^{-1}(x)}{2}$, $g'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$ .5

$$x=\cos(2x)$$ $g(x)=\cos(2x)$ $g'(x)=-2\sin(2x)$

$$x=\frac{\cos(2x)+x}{2}$$ $g'(x)=\frac{1}{2}[-2\sin 2x+1]$

ولكن ليس كل هذه الصيغ يمكن أن تنتج سلاسل تؤول نهايتها الى جذر المعادلة $f(x)=0$. وستتعرف لاحقاً على كيفية الحكم فيما اذا كانت صيغة معينة من هذه الصيغ تنتج سلسلة تؤول نهايتها الى جذر المعادلة $f(x)=0$.

مثال (5): بإستخدام طريقة النقطة الثابتة (fixed-point method) ، أوجد جذر المعادلة $\cos(2x) - x = 0$ ، الذي يوجد في الفترة $[0.5, 0.75]$.

الحل: من المعادلة $\cos(2x) - x = 0$ يمكن الاستنتاج أن:

$$\cos(2x) = x$$

$$2x = \cos^{-1}(x)$$

$$x = \frac{\cos^{-1}(x)}{2}$$

أي أن صيغة التكرار (iterative formula) التي سيتم إستخدامها للوصول الى الجذر المطلوب هي:

$$x_{n+1} = \frac{\cos^{-1}(x_n)}{2}$$

ويمكن اختيار أي قيمة مبدئية (starting value) من داخل الفترة التي يوجد بها جذر المعادلة. فمثلاً، عند اختيار $x_0 = 0.6$ وتكرار إستخدام الصيغة اعلاه، فإننا سنحصل على المتتالية التالية:

$$x_0 = 0.6$$

$$x_1 = \frac{\cos^{-1}(x_0)}{2} = \frac{\cos^{-1}(0.6)}{2} = 0.46365$$

$$x_2 = \frac{\cos^{-1}(x_1)}{2} = \frac{\cos^{-1}(0.46365)}{2} = 0.54434$$

$$x_3 = \frac{\cos^{-1}(x_2)}{2} = \frac{\cos^{-1}(0.54434)}{2} = 0.4976$$

$$x_4 = \frac{\cos^{-1}(x_3)}{2} = \frac{\cos^{-1}(0.4976)}{2} = 0.52499$$

$$x_5 = \frac{\cos^{-1}(x_4)}{2} = \frac{\cos^{-1}(0.52499)}{2} = 0.50905$$

$$x_6 = \frac{\cos^{-1}(x_5)}{2} = \frac{\cos^{-1}(0.50905)}{2} = 0.51836$$

$$x_7 = \frac{\cos^{-1}(x_6)}{2} = \frac{\cos^{-1}(0.51836)}{2} = 0.51293$$

نجد في الآلة الحاسبة $\cos^{-1}(.6)$
دون تغيير النظام (Degree)
ثم نحول الزاوية التي تظهر (الناتج)
إلى الدائري (Radian)
وذلك بضربها $\frac{\pi}{180}$
أو استخدام Red
من البداية (الدائري)
ثم نجد
$\cos^{-1}.6$

$$x_8 = \frac{\cos^{-1}(x_7)}{2} = \frac{\cos^{-1}(0.51293)}{2} = 0.5161$$

$$x_9 = \frac{\cos^{-1}(x_8)}{2} = \frac{\cos^{-1}(0.5161)}{2} = 0.51425$$

$$x_{10} = \frac{\cos^{-1}(x_9)}{2} = \frac{\cos^{-1}(0.51425)}{2} = 0.51533$$

$$x_{11} = \frac{\cos^{-1}(x_{10})}{2} = \frac{\cos^{-1}(0.51533)}{2} = 0.5147$$

$$x_{12} = \frac{\cos^{-1}(x_{11})}{2} = \frac{\cos^{-1}(0.5147)}{2} = 0.51507$$

$$x_{13} = \frac{\cos^{-1}(x_{12})}{2} = \frac{\cos^{-1}(0.51507)}{2} = 0.51485$$

وتستطيع الاستمرار لإيجاد القيم التالية لحين الوصول الى الدقة التي تريدها.

3.5 طريقة نيوتن – رافسون (*Newton-Raphson's Method*) اشتقاقها رياضياً (اشتق

هـذه الطريقـة تعتـبر من أشـهر الطـرق العدديـة المستخدمة لإيجـاد جـذر المعادلة $f(x)=0$ والقريب من قيمة معينة. وهذه الطريقة هي حالة خاصة من طريقة النقطة الثابتة (fixed-point method) ،التي تم شرحها سابقاً.

ويمكن إشتقاق صيغة التكرار المستخدمة بهذه الطريقة واللازمة لإيجاد جذر المعادلة $f(x)=0$ ، بإستخدام متسلسلة تايلور.

فاذا فرضنا أن x_0 هي قيمة تقريبية معروفة لجذر المعادلة $f(x)=0$ و α هي القيمة الدقيقة لهذا الجذر، وكان الفرق بين هاتين القيمتين هو h ، اي أن:

$$h=\alpha-x_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

فإننا ، وبإستخدام متسلسلة تايلور ، نستطيع التعبير عن القيمة الدقيقة α ، بدلالة القيمة التقريبية المعروفة، x_0 ، كما يلي:

$$f(\alpha)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(\xi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

حيث ξ ، قيمة واقعة بين القيمتين α و x_0 .

وحيث أن α هي قيمة دقيقة لجذر المعادلة $f(x)=0$ ، فإن :

$$f(\alpha)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

أي أن المعادلة رقم (2) تصبح :

$$f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(\xi)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

وبأهمال الحد المتبقي $\frac{h^2}{2!}f''(\xi)$ في المعادلة رقم (4) ، وذلك كون المقدار h^2 قليل جدا (لأن القيمتين α و x_0 قريبتين من بعضهما) ، فإننا نستنتج أن:

$$f(x_0)+hf'(x_0)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

من هذه المعادلة، فإن:

$$h=-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

وبتعويض قيمة h من المعادلة (1) ، في المعادلة (6) ، نستنتج أن:

$$\alpha-x_0=-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

أي أن:

$$\alpha=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

من هذه المعادلة نستطيع إيجاد القيمة الدقيقة لجذر المعادلة $f(x)=0$ ، من معرفة قيمته التقريبية.

أي أن صيغة التكرار (iterative formula) التي تُستخدم للوصول الى الجذر المطلوب، هي:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

Example:- Using the N-R method to find a root in

① $[0,1]$ for $f(x)=x^3-x^2+2x-1=0$, $\in=0$

② $[1,2]$ for $f(x)=xe^x+x^2-5=0$, $\in=0.003$

③ $[-2,-1]$ for $f(x)=2x-\tan x+1=0$, $\in=0.001$

① $x_0=\frac{0+1}{2}=0.5$

$f(x)=x^3-x^2+2x-1 \quad => f(x_0)=f(0.5)=0.125-0.25+1-1$
$\quad =-0.125$

$f'(x)=3x^2-2x+2 \quad => f'(x_0)=f'(0.5)=0.75-1+2=1.75$

$f''(x)=6x-2 \quad => f''(x_0)=f''(0.5)=3.063=1$

$$=> \left|\frac{f(x_0)f''(x_0)}{(f'(x_0))^2}\right|=\left|\frac{(-0.125)(1)}{1.75^2}\right|=\left|\frac{-0.125}{3.063}\right|=0.041<1$$

$$\therefore\ x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=x_0-\frac{x_0^3-x_0^2+2x_0-1}{3x_0^2-2x_0+2}=0.5-\frac{-0.125}{1.75}=0.571$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=0.571-\frac{0.002}{1.536}=0.570$$

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=0.570-\frac{0}{1.835}=0.570$$

$\therefore\ |x_3-x_2|=|0.570-0.570|=0=\in \quad => x_3=0.570$ *is a root*

① $x_0=\frac{1+2}{2}=1.5$

$f(x)=xe^x+x^2-5 \quad => f(1.5)=3.973$

$f'(x)=xe^x+e^x+2x \quad f'(1.5)=14.204$

$f''(x)=xe^x+e^x+e^x+2=xe^x+2e^x+2 \quad f''(1.5)=17.686$

$$\left|\frac{(3.973)(17.686)}{14.204^2}\right|=\left|\frac{70.266}{201.754}\right|=0.348<1$$

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=1.5-\frac{3.973}{14.204}=1.220$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=1.220-\frac{0.621}{9.959}=1.158$$

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=1.158-\frac{0.028}{9.186}=1.155$$

$\therefore |x_3-x_2|=|1.155-1.158|=0.003=\in \quad => \quad x_3=1.155$ *is a root*

مثال:- باستخدام طريقة نيوتن-رافسون جد قيمة تقريبية لجذر المعادلة التالية

$$f(x)=xe^x+x^2-5,[1,2],\epsilon=0.003$$

الحل:- اولا نشتق الدالة بحيث $f'(x)=(x+1)e^x+2x$ ومن ثم نوجد قيمة اولية من خلال تقسيم الفترة وذلك

$$x_0=\frac{a+b}{2}=1.5$$

$f(x_0)=3.973$

$f'(x_0)=14.204$

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=1.22$$

$|x_1-x_0|=|1.22-1.5|=0.28>\epsilon$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=1.158$$

$|x_2-x_1|=|1.158-1.22|=0.062>\epsilon$

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=1.155$$

$|x_3-x_2|=|1.155-1.158|=0.003\le\epsilon$, x_3 is the root

مثال:- باستخدام طريقة نيوتن-رافسون جد الجذر النوني للعدد $a>0$

الحل:-

$x=\sqrt[n]{a}$

$x^n=a$

$f(x)=x^n-a$

$f'(x)=nx^{n-1}$

$$\therefore x_{i+1}=x_i-\frac{x_i^n-a}{nx_i^{n-1}}$$

<u>شرط اقتراب طريقة نيوتن-رافسون</u>

ان صيغة طريقة نيوتن-رافسون تتمثل بالشكل

$$x=x_0-\frac{f(x_0)}{f(x_0)}$$

وعند ملاحظة الصيغة العامة للطريقة التكرارية للنقطة الصاعدة $x=g(x)$

فأن صيغة نيونت-رافسون مكافئة لصيغة النقطة الصاعدة فأن

$$g(x)=x_0-\frac{f(x_0)}{f(x_0)}$$

وبما ان شرط التقارب للطريقة التكرارية للنقطة الصاعدة هو $|g'(x)|<1$ فأن

$$g'(x)=1-\frac{f'(x_0)f'(x_0)-f(x_0)f''(x_0)}{f'(x_0)^2}$$
$$=\frac{(f(x_0))^2-(f(x_0))^2+f(x_0)f(x_0)}{(f'(x_0))^2}=\frac{f(x_0)f''(x_0)}{f'(x_0)^2}$$

$=>\therefore \left|\frac{f(x_0)f''(x_0)}{(f'(x_0))^2}\right|<1$ (تمثيل شرط التقارب لهذه الطريقة)

مثال (7): بإستخدام طريقة نيوتن- رافسون(Newton-Raphson method).

أوجد جذر المعادلة $\cos(2x) - x = 0$ ، اذا علمت ان القيمة التقريبية لهذا الجذر هي: $x_0 = 0.6$.

الحل: من هذه المعادلة:

$$f(x) = \cos(2x) - x$$

$$f'(x) = -2\sin(2x) - 1$$

أي أن صيغة التكرار هي:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\cos(2x_n) - x_n}{2\sin(2x_n) + 1}$$

أي أن:

$$x_0 = 0.6$$

$$x_1 = x_0 + \frac{\cos(2x_0) - x_0}{2\sin(2x_0) + 1} = 0.6 + \frac{\cos(2x0.6) - 0.6}{2\sin(2x0.6) + 1} = 0.51703$$

$$x_2 = x_1 + \frac{\cos(2x_1) - x_1}{2\sin(2x_1) + 1} = 0.51703 + \frac{\cos(2x0.51703) - 0.51703}{2\sin(2x0.51703) + 1} = 0.51493$$

$$x_3 = x_2 + \frac{\cos(2x_2) - x_2}{2\sin(2x_2) + 1} = 0.51493 + \frac{\cos(2x0.51493) - 0.51493}{2\sin(2x0.51493) + 1} = 0.51493$$

لاحظ أنه تم الحصول على القيمة الدقيقة للجذر بتكرار الصيغة اعلاه ثلاث مرات فقط.

مثال/ اوجد الجذر التقريبي $\sqrt[3]{7}$ باستخدام طريقة نيوتن- رافسون عند X_0=1.5.

الحـــــــــــــــــــــــــــل:

$$x = \sqrt[3]{7} \rightarrow x^3 = 7 \rightarrow x^3 - 7 = 0$$

$$f(x) = x^3 - 7$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 - 7}{3x_i^2}$$

i	x_i	x_{i+1}
0	1.5	2.037
1	2.037	1.920
2	1.920	1.913
3	1.913	1.913

$\therefore r = 1.913$

مثال/ أوجد الجذر التقريبي للمعادلة :

$$F(x) = x^3 - x - 10 = 0$$

بطريقة نيوتن رافسون

متخذا $\varepsilon = 0.5$ و $x_0 = 4$

الحل:

$$F(x) = x^3 - x - 10$$

$$F'(x) = 3x^2 - 1$$

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} = 4 - \frac{50}{47} = 2.9361703$$

$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F'(x_1)} = 2.9361703 - \frac{12.376836}{24.863288} = 2.4383748$$

وبالتالي فان:

$$|x_2 - x_1| = 0.4977955 < \varepsilon$$

إذا الجذر التقريبي هو

$$x_2 = 2.4383748$$

مثال (5): بإستخدام طريقة نيوتن- رافسون (Newton-Raphson's method).

أوجد قيمة $\sqrt{10}$ ، وبدقة حتى المنزلة العشرية الرابعة.

رابعا:- الطريقة التكرارية (Iterative method)

علينا تحويل المعادلتين الى الصيغتين $x = F(x,y)$ و $y = G(x,y)$ ولاختيار الصيغتين يجب ان يتحقق الشرط التالي:

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial x}\right| < 1 \ \& \ \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right| < 1$$

بعد اختيار الصيغتين فان القانون العام للطريقة التكرارية هي:

$$x_{i+1} = F(x_i, y_i)$$
$$y_{i+1} = G(x_i, y_i), \quad i = 0,1,\ldots$$

وشرط التوقف يكون

$$|x_{i+1} - x_i| < \epsilon \ \ or \ \ |y_{i+1} - y_i| < \epsilon$$

مثال:- جد حل لمنظومة المعادلات $f(x,y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$ و $g(x,y) = x^2 - y^2 - 7 = 0$ عند القيمة [3,4] و لثلاث تكرارات

الحل:-

$$x^2 + y^2 - 25 = 0 \Rightarrow y = \sqrt{25 - x^2} = G(x,y)$$
$$x^2 - y^2 - 7 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{y^2 + 7} = F(x,y)$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 , \frac{\partial G}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{y^2 + 7}} , \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$$
$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial x}\right| = 0 + \frac{3}{4} < 1$$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right| = \frac{4}{\sqrt{23}} + 0 < 1$$

∴ الصيغة صحيحة وذلك لتحقق الشرطين

∴ الصيغة العامة للمسالة هي:

$$x_{i+1} = \sqrt{y_i^2 + 7} \qquad y_{i+1} = \sqrt{25 - x_i^2}$$

$$x_1 = \sqrt{y_0^2 + 7} = \sqrt{23} = 4.796 \qquad y_1 = \sqrt{25 - x_0^2} = \sqrt{16} = 4$$
$$x_2 = \sqrt{y_1^2 + 7} = 4.796 \qquad y_2 = \sqrt{25 - x_1^2} = \sqrt{16} = 1.414$$
$$x_3 = \sqrt{y_2^2 + 7} = 3.0 \qquad y_3 = \sqrt{25 - x_2^2} = \sqrt{16} = 1.414$$

مثال:- باستخدام طريقة التكرارية جد حل لمنظومة المعادلات $f(x,y) = x + 3\log x - y^2 = 0$ و $g(x,y) = 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0$ عند القيمة [3.5,2.5] و $\epsilon = 0.002$

الحل:-

$$x + 3\log x - y^2 \Rightarrow y = \sqrt{x + 3\log x} = G(x,y)$$
$$2x^2 - xy - 5x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{xy + 5x - 1} = F(x,y)$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y + 5}{2\sqrt{2}\sqrt{xy + 5x - 1}} , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{2}\sqrt{xy + 5x - 1}}$$
$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1 + \frac{3}{x}}{2\sqrt{x + 3\log x}} , \quad \frac{\partial G}{\partial y} = 0$$
$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial x}\right| = 0.589 + 0.41 < 1$$
$$\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right| = 0.27 + 0 < 1$$

الصيغة العامة هي:

$$x_{i+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x_i y_i + 5x_i - 1} \qquad y_{i+1} = \sqrt{x_{i+1} + 3\log x_{i+1}}$$

$$x_1 = 3.553 \qquad y_1 = 2.281$$
$$x_2 = 3.526 \qquad y_2 = 2.273$$
$$x_3 = 3.510 \qquad y_3 = 2.268$$
$$x_4 = 3.501 \qquad y_4 = 2.266$$
$$|y_4 - y_3| = 0.002 = \epsilon$$

The solution is (3.501, 2.266)